- RIASSUNTO SERIE DI FOURIER.

La Serie di Fourier è una rappresentazione di una funzione periodica mediante una combinazione lineare di funzioni sinusoidali.

Posto $X^\infty = C^{(k)}([-\pi, +\pi], \mathbb{C})$, $C^{(k)}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ spazio vettoriale a dimensione infinita, fissiamo i concetti di:

- ANALIZZATORE DI FOURIER: componente della base di X^∞ usata nell'espressione di $f(x)$. Si definisce analizzatore di Fourier: $\hat{f}_k \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$.
- COEFFICIENTE DI FOURIER: termine che viene moltiplicato a ciascuna componente della base degli analizzatori. Si definisce ~~componente~~ coefficiente di Fourier: $\hat{f}_k = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y) \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} dy\right) \cancel{\sqrt{2\pi}}$.

La Serie di Fourier è così definita: $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

IMPORTANTE: poiché, prendendo due generici vettori della base degli analizzatori, notiamo che $\left\langle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{ilx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(k-l)x}}{\sqrt{2\pi}} dx = \begin{cases} 1 & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases}$

possiamo concludere che la base degli analizz. è ORTONORMALE.

~~Pertanto, sapendo che~~ $\cancel{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\int \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} \cdot f(y)\, dy\right] \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}}$

Sapendo ciò, posso provare che $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, perché proiettando $f(x)$ sull'n-esima componente:

$$\left\langle f(x), \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_k \cdot \overbrace{\left\langle \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle}^{\to \text{Vale } 0, 1 \text{ perché ortonorm.}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle f(x), \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \hat{f}_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iny}}{\sqrt{2\pi}} f(y)$$

- LEMMA DI RIEMANN-LEBESGUE

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrabile su un qualunque intervallo chiuso $[a,b]$ di $\mathbb{R}$, con $f \in C^{(1)}([a,b])$ e con derivate pure integrabili su $[a,b]$.
Allora $\lim_{k \to +\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} = \hat{f}_k = 0$. (se f è MISURABILE $\Rightarrow f_k = 0$ $k \to +\infty$)

- NUCLEO DI DIRICHLET.

Scriviamo in modo esteso la definizione di $f(x)$ tramite serie di Fourier.

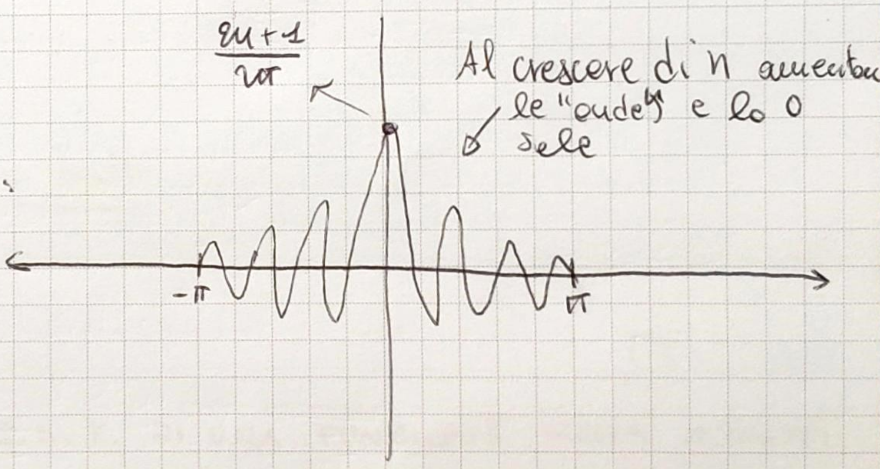
$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \frac{e^{+ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \left[\int f(y) \cdot \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} dy \right] \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{ik(x-y)} dy$$

Definisco quindi NUCLEO DI DIRICHLET:

$$D_n(w) = \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikw}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_n(x-y) \, dy$$



+ Proprietà nucleo di Dirichlet:

a) $D_n(w)$ è PARI

b) $D_n(w)$ è 2π-PERIODICO

c) $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(w) \, dw = 1$

d) $D_n(w=0) = \frac{2n+1}{2\pi}$

e) $D_n(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikw} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})w]}{\sin \frac{w}{2}}$ → NO DIMOSTRAZIONE

- $D_n(w)$ è pari, data una f 2π-periodica, all'approssimazione in serie di Fourier di f troncata all'n-esimo termine.

• FUNZIONE LISCIA A TRATTI

Si dice che $f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ è LISCIA A TRATTI SE, dato un numero finito di punti $x_1, \dots, x_n \in [-\pi, \pi]$ si ha che:

a) $f \in C^{(1)}(]x_j, x_{j+1}[)$, pertanto è derivabile e continua su ogni aperto di $[-\pi, \pi]$ formato dai punti suddetti.

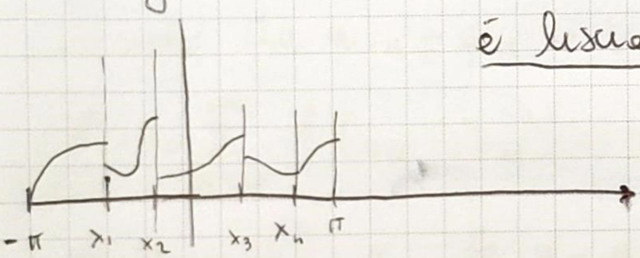
b) In ciascuno degli x_j $\exists$ i limiti dx e sx di $f(x)$ e sono ~~uguali~~ t.c.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_j^\pm} f(x_j) = f(x_j^\pm)$$

c) In ciascuno degli x_j $\exists$ i limiti dx e sx di $f'(x)$ e sono ~~uguali~~ t.c.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_j^\pm} f'(x_j^\pm) = f'(x_j^\pm)$$

e.g.:



è liscia a tratti

TEOREMA: CONVERGENZA DELLA S.D.F. DI UNA FUNZIONE LISCIA A TRATTI

Se f è liscia a tratti in ogni $x \in [-\pi, \pi]$, la serie di Fourier converge ~~in ogni punto di continuità della f~~ a:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

In particolare la s.d.F converge in ogni punto di continuità della f.

• SVILUPPO IN SERIE DI SENI E COSENI

Dati $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_k \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, per def. di numero complesso, sappiamo che

$e^{-iky} = \cos ky + i \sin ky$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left[\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ky\,dy - i\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ky\,dy}_{\hat{f}_k}\right]\cdot\underbrace{\cos(kx)+i\sin(kx)}_{e^{ikx}}$$

Definendo:

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos(ky)\,dy, \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin(ky)\,dy,$$

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy$ possiamo riscrivere $f(x)$ come:

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}(a_k-ib_k)\cdot(\cos kx+i\sin kx) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2}(a_k-ib_k)(\cos kx+i\sin kx)$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}(a_n-ib_n)\cdot\underbrace{\cos(-nx)+i\sin(-nx)}_{\cos(nx)-\sin(nx)}$$

Si nota che $a_{-k}=a_k$ e $b_{-k}=-b_k$, quindi:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2}(a_k-ib_k)\left[\cos(kx)+i\sin(kx)\right]+\sum_{n=1}\frac{1}{2}(a_n+ib_n)\left(\cos(nx)-i\sin(nx)\right)$$

e, se $n=0$, $b_k=0$, $a_k=1$,

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2}\cos(nx)\left[a_n+a_n-\cancel{ib_n}+\cancel{ib_n}\right]+\frac{1}{2}\left[\sin(nx)\left(\cancel{ia_n}-\cancel{ia_n}+b_n+b_n\right)\right]+$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\cos(kx)+\sum_{k=1}b_k\sin(kx)\rightarrow \boxed{\text{SDF IN FORMA TRIGONOMETRICA}}$$