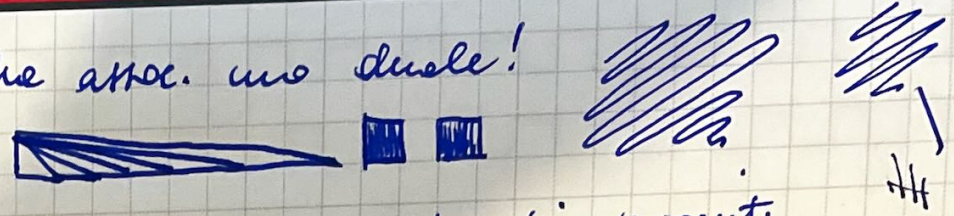


TEORIA DELLA DUALITÀ

↳ la dualità di una soluzione rivela nelle caratteristiche di quest'ultima di essere la stessa soluzione ottima ^{max} per un problema di min che per un prob. di max.

⇒ Sostanzialmente si riprende, graficamente, all'esterno delle regione ammissibili, ottimizzando "A rovescio" (se dato trovare il max \Rightarrow MINIMIZZO all'esterno delle regione).

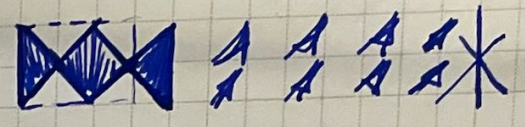
Ogni problema ne ha assoc. uno duale!



dato:

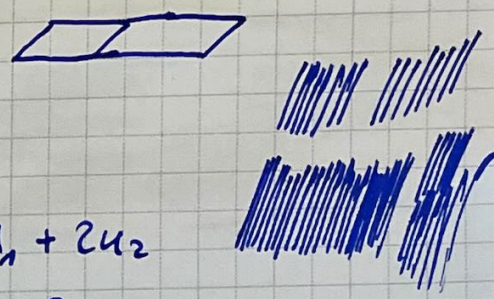
MIN: $C^T X$
 $Ax \geq b$
 $X \geq 0$
 (PRIMAL)

— duale — \rightarrow MAX: $U^T b$ \rightarrow +. noti: incognite
 $U^T A \leq C^T$ \rightarrow +. noti: costi ridotti del p.-orig.
 $U \geq 0$
 (DUAL)



- ogni "primal constraint" ha una "variabile duale" associata.
- ogni "primal variable" ha un "costo duale" associato.

\hookrightarrow Variabili e costi si scambiano di ruolo.



es:

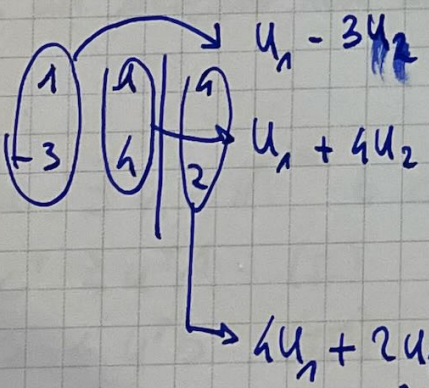
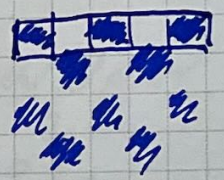
min: $x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \geq 4$
 $-3x_1 + 4x_2 \geq 2$
 $x_1, x_2 \geq 0$

2 VINCOLI =
 2 V. DUALI

MAX: $4u_1 + 2u_2$

$u_1 - 3u_2$
 $u_1 + 4u_2$
 $u_1, u_2 \geq 0$



\rightarrow leggi le colonne
 1 per colonna
 e la moltiplica
 per (u_1, u_2)

\hookrightarrow i t.u. diventano le f. obiettivi

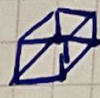
generalmente:



min
 $a_i^T x \geq b_i$
 $a_i^T x \leq b_i$
 $a_i^T x = b_i$

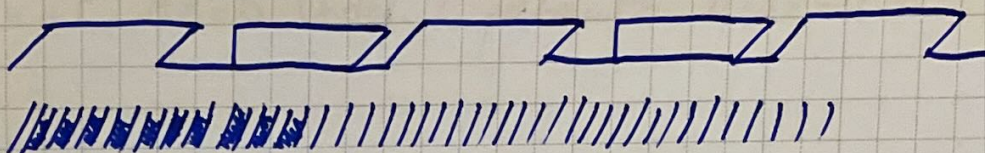
max
 $u_i \geq 0$
 $u_i \leq 0$
 u_i free

→ No VIOLAZIONI DI SEGNO



$x_j \geq 0$
 $x_j \leq 0$
 x_j free

$u^T A_j \leq c_j$
 $u^T A_j \geq c_j$
 $u^T A_j = c_j$



↳ se si ha un prob. di max
 si legge le tabelle
 da dx e sx (e viceversa)



• Dimostr. della dualità

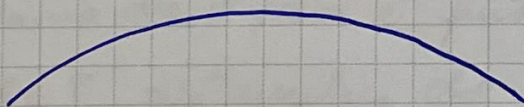
> Lemma di Farkas

• Una disuguaglianza lineare $c_0 \leq c^T x$ è verificata da tutti i p.t.v di un poliedro non vuoto definito da $P = \{Ax = b, x \geq 0\}$,
 ↓
 PLC problem

se $\exists u \in \mathbb{R}^m$ t.c.:

$c^T \geq u^T A$ (I)

$c_0 \leq u^T b$ (II)



• Dim: lemma di F. (1)

in forma $Ax = b$

hp: (I) e (II) sono vere

th: se I e II sono vere $\Rightarrow C^T x \geq c_0$

di fatti:

$C^T x \geq u^T A x$ \rightarrow se la $x \in P$, $Ax = b$ (x def.), pertanto $u^T A x = u^T b$

Moltiplico entrambi
le parti di (I)
per un vett.

$$x \geq 0$$

$\Rightarrow C^T x \geq u^T b$, per (II) $u^T b \geq c_0$ (per hp) \Rightarrow

$\Rightarrow C^T x \geq u^T b \geq c_0 \Rightarrow C^T x \geq c_0$

\Rightarrow proof: se la $x \in P \Rightarrow \bar{c}$ vero che $C^T x \geq 0$

(2)

hp: se $c_0 \leq C^T x \Rightarrow$ (I) e (II) sono vere

$\rightarrow c_0 \leq C^T x$ si suppone valida

\rightarrow costruiamo un PLC di MINIMIZZAZIONE:

$\min \{C^T x : x \in P\}$. Supponiamo che il prob. è finito, perché,

inoltre $c_0 \leq C^T x \forall x \in P$, ciò implica che $c_0 \leq \min \{C^T x : x \in P\}$.

pertanto l'ottimo sarà $\geq c_0 \Rightarrow P$ ha un vertice ottimo.

→ Annunciamo x^* la sol. ottima e prendiamo la base B di questa sol.

(0)
 • def. x . assumi il vettore $u^T = c_B^T B^{-1}$, che soddisfa (I) e (II).
 dimostro che le due cond. (I, II) sono soddisfatte dal vettore u^T !

⇒ (I) $c^T = c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0 \Rightarrow c^T \geq u^T A$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{costo ridotto}}$

→ se siamo nelle t . ottime, allora N c.v. sono tutti ≥ 0 ,
 perciò $\underbrace{c_B^T B^{-1} A}_{u^T A} = u^T A \Rightarrow c^T \geq u^T A$ (I verific.).

⇒ (II) $c_0 \leq \overset{(1)}{c^T x^*} = \overset{(2)}{c_B^T x_B^*} = \overset{(3)}{c_B^T B^{-1} b} = \overset{(4)}{u^T b}$

→ per il \leftarrow verificato $c_0 \leq c^T B^{-1} b \forall x$, lo stesso si verifica anche per x^*

(2) $c^T x^* = c_B^T x_B^*$ x . def. di sol. ottima

⇒ $c_0 \leq$

(3) sempre x . def. $c_B^T x_B^* = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot b$

4) per (0) $c_B^T \cdot B^{-1} = u^T \Rightarrow c_B^T B^{-1} b = u^T b$

⇒ $c_0 \leq u^T b \rightarrow$ (II) verificato

• Descriv. formale del problema duale

• $P = \{Ax = b, x \geq 0\}$

> $\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = \max \{c_0 : c_0 \leq c^T x, x \in P\}$

min INF = max SUP

dualità
 CNF
 LDF
 $c_0 \leq c^T x$
 $x \in P$

> per il LDF:

$$\max \{c_0 : c_0 \leq u^T b, c^T \geq u^T A\}$$

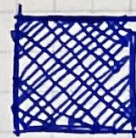
se vale il LDF $\Rightarrow \exists u^T$ che verifica le queste cond.

> quindi:

$$\max \{u^T b : c^T \geq u^T A\}$$

$$\min \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\} = \max \{u^T b : c^T \geq u^T A\}$$

\hookrightarrow TEOREMA DEL PROB. DUALE (poggior);



> DUALITÀ FORTE (teorema) \longrightarrow

se un PLC p. dv. ammissibile e finito \Rightarrow il valore delle s. e. è pari al max del suo problema duale.

> DUALITÀ DEBOL

\hookrightarrow problemi in forma canonica

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \forall (\tilde{x}, \tilde{u}), \tilde{x} \in P, \tilde{u} \in D$$

$$D = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T A \leq c^T, u^T \geq 0\} = \emptyset \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}^T b \leq c^T \tilde{x}$$

→ tutte le soluzioni ammissibili del p. duale hanno un valore $z \leq$ di tutte le soluz. primali.

→ le sol. duali sono sempre \leq delle primali.

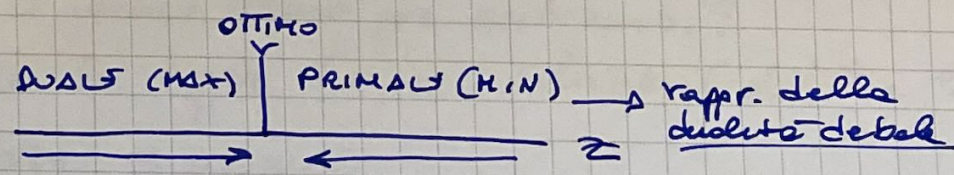
DIM:

dato \tilde{x} s. del primale

$\Rightarrow A\tilde{x} \geq b$ x. def. di s. ammissibile

$\Rightarrow \tilde{u}^T A\tilde{x} \geq \tilde{u}^T b$, ma, poiché $c^T \geq \tilde{u}^T A \Rightarrow c^T \tilde{x} \geq \tilde{u}^T b$

↓
ammissibile per il duale $z \geq 0$
(NON CAMBIA IL SEGNO)



• Si può stilare una lista di caristiche ~~relazioni~~ possibili

DUALS	FINITO	VUOTO VUOTO	INFINITO
FINITO	X		
VUOTO		X (2)	X (1)
INFINITO		X (1)	

→ Se uno dei due problemi è finito, abbiamo dimostrato che \exists sempre una sol. duale FINITA. (D. FORTE)

• con l'app. della dualità debole troviamo gli altri cas.

1. se il primale è unbounded, il duale non riesce a "MINORARE" (o "MASSIMO") il problema primale (che si estende all'infinito), pertanto le sol. duali non hanno senso. Stesso discorso si applica al duale unbounded.

2. se il problema è vuoto, a priori non si definisce il duale (può essere vuoto o illimitato) e viceversa.

Se uno dei due problemi è vuoto bisogna verificare che l'altro abbia almeno una sol. per due di tre allentate, altrimenti è vuoto anch'esso!

> CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ

$$(P) \min \{ C^T x : Ax \geq b, x \geq 0 \} \quad (D) \max \{ u^T b : u^T A \leq C^T, u^T \geq 0 \}$$

• Come ottengo il vertice ottimo per entrambi?

• Come ottengo la coppia (x, u) soluzione di P e D?

→ deve soddisfare 3 proprietà:

a) $Ax \geq b, x \geq 0$ (ammissibile in P)

b) $u^T A \leq C^T, u^T \geq 0$ (ammissibile in D)

c) $C^T x = u^T b$ (DUALITÀ FORTE)

⇒ se a), b), c) sono verif. ⇒ u, x sono ottime.

DIM:

→ prendiamo le prime cond. (a) e (b) e mett. per x :

$$\begin{array}{c} \Rightarrow C^T x \geq u^T A x \geq u^T b \Rightarrow C^T x \geq u^T b. \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad b) \quad \quad \quad \text{vando} \end{array}$$

Se vale anche (c): $C^T x = u^T b$, ma quindi $u^T b = u^T A x$!

$$\Rightarrow \text{se } u^T b = u^T A x \Rightarrow \underline{C^T x = u^T A x} \quad !!!$$

$$\Rightarrow (c^T - u^T A)x = 0, \quad u^T (Ax - b) = 0 \quad \text{POQA} \leq \text{PS}$$

↳ eq. moltiplicate che danno il legame variabile - moltiplicatore

$$\hookrightarrow (c^T - u^T A)x = 0, \quad x \geq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{DUALITÀ} \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (c_1 - u^T A_1)x_1 = 0 \\ \dots \\ (c_n - u^T A_n)x_n = 0 \end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 (a_{11}x - b_1) = 0 \\ \dots \\ u_m (a_{m1}x - b_m) = 0 \end{array} \right.$$