TEORIA DELLA DUALITÀ

↳ la dualità di una soluzione risiede nelle caratteristiche di quest'ultima di essere la stessa soluzione ottima sia per un problema di min che per un prob. di MAX.

⇒ Sostanzialmente si ragiona, graficamente, <u>all'esterno</u> della regione ammissibile, ottimizzando "A ROVESCIO" (se devo trovare il MAX ⇒ MINIMIZZO all'esterno della regione).

• Ogni problema ne ha assoc. uno duale!

dato:

MIN: $c^T x$ —duale→ MAX: $u^T b$ → t. noti: incognite

$Ax \geq b$ → $u^T A \leq c^T$ → t. noti: costi ridotti del f. obj.

$x \geq 0$ → $u \geq 0$

(PRIMAL) (DUAL)

• ogni "primal constraint" ha una "variabile duale" associata.
• ogni "primal variable" ha un "vincolo duale" associato.

↳ Variabili e vincoli si scambiano di ruolo.

es:

min: $x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \geq 4$

$-3x_1 + 4x_2 \geq 2$

$\Big\}$ 2 VINCOLI = 2 V. DUALI

$x_1, x_2 \geq 0$

⇒

MAX: $4u_1 + 2u_2$

$u_1 - 3u_2$

$u_1 + 4u_2$

$u_1, u_2 \geq 0$

$\begin{matrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{matrix}$

→ $u_1 - 3u_2$ → leggo la matrice A per colonne e la moltiplico per (u_1, u_2)

→ $u_1 + 4u_2$

→ $4u_1 + 2u_2$

↳ i t.n. diventano la f. obiettivo

→ generalmente:

min	max
$a_i^T x \ge b_i$	$u_i \ge 0$
$a_i^T x \le b_i$	$u_i \le 0$
$a_i^T x = b_i$	u_i free → NO VINCOLI DI SEGNO
$x_j \ge 0$	$u^T A_j \le c_j$
$x_j \le 0$	$u^T A_j \ge c_j$
x_j free	$u^T A_j = c_j$

↳ se si ha un prob. di max si legge la tabella da dx a sx (e viceversa)

- Dimostr. della dualità

> Lemma di Farkas

- Una disuguaglianza lineare $\underset{\text{scalare}}{c_0} \le c^T x$ è verificata da tutti i p.ti di un poliedro NON vuoto definito da $P = \{\underbrace{Ax = b,\ x \ge 0}_{\text{PLC problem}}\}$,

se $\exists u \in \mathbb{R}^m$ t.c:

$c^T \ge u^T A$ (I)

$c_0 \le u^T b$ (II)

• Dim: lemma di F. (1)

~~[illegible] $c^T \geq u^T A$~~

hp: (I) e (II) sono vere

th: se I e II sono vere $\Rightarrow c^T x \geq c_0$

infatti:

$$\underbrace{c^T x \geq u^T A x}_{\text{moltiplico entrambe le parti di (I) per un vett. } x \geq 0}$$ → se la $x \in P$, $Ax = b$ (x def.), pertanto $u^T A x = u^T b$

$\Rightarrow c^T x \geq u^T b$, per (II) $u^T b \geq c_0$ (per hp) $\Rightarrow$

$\Rightarrow c^T x \geq u^T b \geq c_0 \Rightarrow c^T x \geq c_0$

$\Rightarrow$ proof: se la $x \in P \Rightarrow$ è vero che $c^T x \geq 0$

(2)

hp: se $c_0 \leq c^T x \Rightarrow$ (I) e (II) sono vere

→ $c_0 \leq c^T x$ si suppone valida

→ costruiamo un PLC di MINIMIZZAZIONE:

$\min\{c^T x : x \in P\}$. Sappiamo che il prob. è finito, perché, siccome $c_0 \leq c^T x \ \forall x \in P$, ciò implica che $c_0 \leq \min\{c^T x : x \in P\}$, pertanto l'ottimo sarà $\geq c_0 \Rightarrow P$ ha un vertice ottimo.

→ Chiamiamo x^* la sol ottima e prendiamo la base B di questa sol.

$$(0)$$

• definisco x. assurdo il vettore $u^T = c_B^T B^{-1}$, che soddisfa (I) e (II).
dimostro che le due cond. (I, II) sono soddisf dal vettore u^T!

$\Rightarrow$ (I) $\underbrace{c^{-T} = c^T - c_B^T B^{-1} \cdot A}_{\text{costi ridotti}} \geq 0 \Rightarrow c^T \geq u^T A$

→ se siamo nella x. ottima, allora i c.r. sono tutti ≥ 0, poiché $\underbrace{c_B^T B^{-1}}_{u^T (0)} A = u^T A \Rightarrow c^T \geq u^T A$ (I verif.).

$$\Rightarrow (II) \quad \underset{(1)}{c_0 \leq c^T x^*} \overset{(2)}{=} c_B^T x_B^* \overset{(3)}{=} c_B^T B^{-1} b \overset{(4)}{=} u^T b$$

→ poiché è verificato $c_0 \leq c^T B$ $\forall x$, lo sarà sicuramente anche per x^*

(2) $c^T x^* = c_B^T x_B^*$ x. def. di soluzione ottima

~~$\Rightarrow c_0 \leq$~~

(3) sempre x. def. $c_B^T x_B^* = c_B^T \cdot B^{-1} \cdot b$

4) per (0) $c_B^T \cdot B^{-1} = u^T \Rightarrow c^T_B B^{-1} b = u_B^T b$

$\Rightarrow c_0 \leq u^T b$ → (II) verificato

- Descriz. formale del problema duale

- $P = \{Ax = b,\ x \geq 0\}$,

> $\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\} \overset{\text{dualità}}{=} \max\{c_0 : c_0 \leq c^T x,\ x \in P\}$

min INTERNO = MAX ESTERNO

CNES LDF

$\boxed{c_0 \leq c^T x \quad \forall x \in P}$

> per il LDF:

$\max\{c_0 : c_0 \leq u^T b,\ c^T \geq u^T A\}$

coefficienti $\Rightarrow$ se vale il LDF $\Rightarrow \exists u^T$ che verifica queste cond.

> quindi:

$\max\{u^T b : c^T \geq u^T A\}$

$\hookrightarrow$ $\min\{c^T x : Ax = b,\ x \geq 0\} = \max\{u^T b : c^T \geq u^T A\}$

$\hookrightarrow$ TEOREMA DEL PROB. DUALE (poggeri);

> DUALITÀ FORTE (teorema)

Se un PLC p. ott. ammette s. finita $\Rightarrow$ il valore della s. è pari ~~alla~~ al MAX del suo problema duale.

> DUALITÀ DEBOLE

$\hookrightarrow$ problemi in forma CANONICA

$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \geq b,\ x \geq 0\} \neq \emptyset$

$D = \{u \in \mathbb{R}^m : u^T A \leq c^T,\ u^T \geq 0\} = \emptyset$

$\Rightarrow \forall (\tilde{x}, \tilde{u}),\ \tilde{x} \in P,\ \tilde{u} \in D$

$\Rightarrow \tilde{u}^T b \leq c^T \tilde{x}$

→ tutte le soluzioni ammissibili del p. duale hanno un valore $\leq$ di tutte le soluz. primali.

⇒ le sol. duali sono sempre $\leq$ delle primali.

DIM:

dato $\tilde{x}$ s. del primale

$\Rightarrow A\tilde{x} \geq b$ x. def. di s. ammissibile

$\Rightarrow \tilde{u}^T A \tilde{x} \geq \tilde{u}^T b$, ma, perché $c^T \geq \tilde{u}^T A \Rightarrow c^T \tilde{x} \geq \tilde{u}^T b$

ammissibile per il duale e ≥ 0 (NON CAMBIO DI SEGNO)

OTTIMO

DUALE (MAX) | PRIMALE (MIN) → rappr. della dualità debole

$\longrightarrow \quad \longleftarrow \quad \geq$

• Si può stilare una lista di casistiche possibili

DUALE	FINITO	~~[illegible]~~ VUOTO	INFINITO
FINITO	X		
VUOTO		X (2)	X (1)
INFINITO		X (1)	

→ se uno dei due problemi è finito, abbiamo dimostrato che $\exists$ sempre una sol. duale FINITA. (D. FORTE)

• con l'app. della dualità debole troviamo gli altri casi.

1. se il primale è unbounded, il duale non riesce a "MINORARE" (o "MAGGIORARE") il problema primale (che si estende all'infinito), pertanto le sol. duali non hanno spazio. Stesso discorso si applica al duale illimitato.

2. se il primale è vuoto, a priori non si definisce il duale (può essere VUOTO o ILLIMITATO) e viceversa.
Se uno dei due problemi è vuoto bisogna verificare che l'altro abbia almeno una sol. per dire che sia illimitato, altrimenti è vuoto anch'esso!

> CONDIZIONI DI OTTIMALITÀ

(P) $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$. (D) $\max\{u^T b : u^T A \leq c^T, u^T \geq 0\}$

- Come ottengo il vertice ottimo per entrambi?
- Come ottengo le coppie (x, u) soluzioni di P e D?

→ devono soddisfare 3 proprietà:

a) $Ax \geq b$, $x \geq 0$ (ammissibilità in P)

b) $u^T A \leq c^T$, $u^T \geq 0$ (ammissibilità in D)

c) $c^T x = u^T b$ (DUALITÀ FORTE)

⇒ se a), b), c) sono verif. ⇒ u, x sono ottime.

DIM:

→ prendiamo le prime cond. (a) e (b) è verif. per x:

$$\Rightarrow \underbrace{c^T x \geq u^T A x}_{b)} \overset{a)}{\geq} u^T b \Rightarrow c^T x \geq u^T b.$$

VALIDO

Se vale anche (c): $c^T x = u^T b$, ma quindi $u^T b = u^T A x$!

$$\Rightarrow \text{se } u^T b = u^T A x \Rightarrow \boxed{c^T x = u^T A x} \;!!!$$

$$\boxed{\Rightarrow (c^T - u^T A)\,x = 0, \quad u^T(Ax - b) = 0}$$ POGGESES

↳ eq. matriciale che descrive il legame duale-primale

↳ $(c^T - u^T A)\,x = 0, \quad x \geq 0$

DIVENTA $\longrightarrow$
$$\begin{cases} (c_1 - u^T A_1)\,x_1 = 0 \\ \dots \\ (c_n - u^T A_n)\,x_n = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u_1(a_1 x - b_1) = 0 \\ \dots \\ u_m(a_m x - b_m) = 0 \end{cases}$$