Esercitazione n°3

1 Successioni di funzioni

Esercizio 1: Studiare la convergenza in $(0, 1)$ della successione $\{f_n\}$ dove $f_n(x) = \frac{n}{(1+nx)^2}$.

Sol.: Si verifica facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \forall\, x \in (0, 1)$$

mentre

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(0,1)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

da cui si ricava che la convergenza non è uniforme (anche se il limite è continuo).

Esercizio 2: Studiare la convergenza su $\mathbb{R}$ della successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & n \le x < n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sol.: Anche in questo caso $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Si vede facilmente che

$$\sup_{\mathbb{R}} f_n = 1$$

dunque la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$, mentre su ogni intervallo chiuso $[a, b]$ abbiamo per ogni $n > b$

$$\sup_{[a,b]} f_n = 0$$

pertanto sugli intervalli limitati si ha convergenza uniforme.

Esercizio 3: Verificare che la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & \frac{1}{2n} < x \le \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

converge puntualmente ma non uniformemente su $[0, 1]$, tuttavia vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Sol.: Si vede facilmente che il limite puntuale della successione è la funzione nulla. Tuttavia la convergenza non è uniforme perché l'estremo superiore delle f_n vale $\sqrt{n}$ e diverge per n tendente a ∞. Invece

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_{1/2n}^{1/n} \sqrt{n}\,dx = \sqrt{n}\frac{1}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

come voluto.

Esercizio 4: Verificare che la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} an^2x & 0 \le x < \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b}n^2x + \frac{ab}{b-1}n & \frac{1}{n} \le x < \frac{b}{n} \\ 0 & \frac{b}{n} \le x \le b \end{cases}$$

con $a > 0$, $b > 1$ converge puntualmente ma non uniformemente su $[0, b]$, e che per $\{f_n\}$ non vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Sol.: Il limite puntuale di $\{f_n\}$ è ancora una volta la funzione nulla, poiché l'intervallo $[b/n, b]$ tende all'intero intervallo $[0, b]$. Comunque il massimo delle f_n (che sono funzioni continue) è raggiunto per $x = \frac{1}{n}$ e vale an che però diverge per n tendente a ∞. dunque la covergenza non è uniforme. Calcoliamo l'integrale delle f_n:

$$\int_0^b f_n(x)\,dx = \int_0^{1/n} an^2x\,dx + \int_{1/n}^{b/n} \left(\frac{a}{1-b}n^2x + \frac{ab}{b-1}n\right)\,dx = \frac{a}{2}+$$

$$+\frac{a}{1-b}\left[\frac{n^2x^2}{2} - bnx\right]_{1/n}^{b/n} = \frac{a}{2} + \frac{a}{1-b}\left(\frac{b^2-1-2b^2+2b}{2}\right) = \frac{a}{2} + \frac{a(b-1)}{2} = ab$$

Tale integrale non dipende da n e non può dunque convergere a 0 come vorrebbe il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.

Nota: Si osservi che il grafico delle funzioni f_n ha la forma di un triangolo di base b/n ed altezza an. Dunque l'integrale si può calcolare anche come area del triangolo e si ottiene nuovamente

$$A = \frac{1}{2}an\frac{b}{n} = \frac{ab}{2}.$$

2 Serie di funzioni

Definizione 2.1 *Una serie di funzioni converge* **puntualmente** *(risp:* **uniformemente***) in un intervallo I di $\mathbb{R}$ se la successione delle sue somme parziali converge puntualmente (risp: uniformemente).*

Definizione 2.2 *Una serie converge* **totalmente** *in I se esiste una serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convergente a termini positivi tale che*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall\, x \in I, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Ricordiamo inoltre che

convergenza totale $\Rightarrow$ convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale

Esercizio 5: Verificare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dove $f_n(x) = \frac{x}{x^4+3n^4}$ converge totalmente in $\mathbb{R}$.

Sol.: Cerchiamo di stimare le f_n con il loro estremo superiore. Abbiamo

$$f_n'(x) = \frac{x^4 + 3n^4 - 4x^4}{(x^4 + 3n^4)^2} = 3\frac{n^4 - x^4}{(x^4 + 3n^4)^2}$$

e si annulla solo per $x = \pm n$. Il massimo di f_n si raggiunge dunque per $x = n$ e vale $1/(4n^3)$.

Se poniamo dunque $M_n = \frac{1}{4n^3}$ abbiamo per ogni n

$$|f_n| \leq M_n$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Esercizio 6: Verificare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ dove

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

converge uniformemente ma non totalmente in $[1, +\infty)$.

Sol.: Calcoliamo la somma parziale delle f_n. Abbiamo

$$s_k(x) = \sum_{i=1}^{k} f_i(x) = \begin{cases} 1/i & i \leq x < i+1 \\ 0 & x \geq k+1 \end{cases}$$

Il limite delle somme parziali è dunque la funzione

$$f(x) = \frac{1}{i} \quad \forall\, x \in [i, i+1), \forall\, i \in \mathbb{N}$$

La convergenza è uniforme. Infatti

$$\sup_I |s_k(x) - f(x)| = \frac{1}{k+1}$$

che converge a 0 per k tendente a ∞. Tuttavia ogni serie numerica che abbia termine generico M_n per cui

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \leq M_n$$

non può convergere (perché maggiora la serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ che diverge). Non si può quindi avere convergenza totale.

2.1 Serie di potenze

Ricordiamo che per le serie di potenze $S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vale il seguente

Teorema 2.3 *Se la serie $S(x)$ converge in un punto $\xi \neq 0$ allora converge totalmente in ogni intervallo chiuso e limitato contenuto in $(-|\xi|, |\xi|)$.*

Ha quindi senso parlare del **raggio di convergenza** ϱ di $S(x)$, dove

$$\varrho := \sup\{x \in \mathbb{R}^+ \mid S(x) \, \text{converge in} \, x\}$$

Per determinare il raggio di convergenza di una serie di potenze si possono usare i due seguenti criteri:

Teorema 2.4 (Criterio di Cauchy-Hadamard) *Sia $\ell := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Allora*

$$\varrho = \frac{1}{\ell}$$

dove se $\ell = 0$ $\varrho = \infty$, mentre se $\ell = \infty$ $\varrho = 0$.

Teorema 2.5 (Criterio di D'Alembert) *Sia $\ell := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Allora*

$$\varrho = \frac{1}{\ell}$$

dove se $\ell = 0$ $\varrho = \infty$, mentre se $\ell = \infty$ $\varrho = 0$.

E' importante notare che al bordo dell'intervallo $(-\varrho, \varrho)$ non si può stabilire a priori la convergenza della serie.

Esercizio 7: Verificare che il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

vale 1 e che per $x = 1, -1$ la serie non converge.

Sol.: Poiché $a_n = 1$ per ogni n, dal criterio di Cauchy-Hadamard si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1$$

da cui $\varrho = 1$. Per $x = 1$ tale serie ha termine generico uguale ad 1 e diverge. Per $x = -1$ il termine generico è $(-1)^n$ e la serie risulta indeterminata. Dunque non c'è convergenza al bordo dell'intervallo $(-1, 1)$.

Esercizio 8: Verificare che il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

vale 1 e che per $x = 1$ la serie non converge, mentre si ha convergenza per $x = -1$.

Sol.: Dal criterio di D'Alembert

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

da cui $\varrho = 1$. Per $x = 1$ la serie data coincide con la serie armonica, dunque diverge, mentre per $x = -1$ abbiamo la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che converge per il criterio di Leibnitz per le serie a segno alterno.

Esercizio 9: Verificare che il raggio di convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

vale 1 e che per $x = 1, -1$ la serie converge.

Sol.: Ancora una volta dal criterio di D'Alembert abbiamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

dunque $\varrho = 1$. In $x = 1$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

che converge. In $x = -1$ invece abbiamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

che converge per il criterio di Leibnitz.

Esercizio 10: Determinare il raggio di convergenza di

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3+1/n)^n} x^n$$

Sol.: (a): Dal criterio di D'Alembert abbiamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

da cui $\varrho = 1$.

(b): Dal criterio di Cauchy-Hadamard

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(3+1/n)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3+1/n} = \frac{1}{3}$$

da cui $\varrho = 3$.

3 Altri esercizi svolti

Esercizio 11: Verificare che la successione $\{f_n\}$ definita da $f_n(x) = \frac{x^2}{n+x^2}$ converge puntualmente ma non uniformemente su $\mathbb{R}$.

Sol.: Per ogni $x \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

Inoltre $0 \leq f_n(x) < 1$ su $\mathbb{R}$ e dunque

$$\sup_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

Ne segue che $\{f_n\}$ non converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

Esercizio 12: Studiare la convergenza puntuale delle serie di funzioni

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} e^{-nx} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nx}$$

Sol.: (a): Per $x < 0$ la serie non converge perché il suo termine generico non è infinitesimo. Per $x = 0$ la serie è identicamente nulla (dunque converge). Quando invece $x > 0$ dal criterio del rapporto abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} e^{-(n+1)x} \cdot \frac{n}{x} e^{nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} e^{-x} = e^{-x} < 1$$

dunque la serie converge puntualmente.

(b): Come prima per $x < 0$ il termine generico della serie non è infinitesimo. Per $x = 0$ però la serie data coincide con la serie armonica e non converge. Per $x > 0$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} e^{-(n+1)x} \cdot n e^{nx} = e^{-x} < 1$$

Quindi si ha convergenza puntuale solo per $x > 0$ e non per $x \geq 0$ come nel caso precedente.

Esercizio 13: Verificare che la serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$$

converge uniformemente ma non totalmente in $I = [0, 1]$.

Sol.: Abbiamo

$$\sup_I \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$$

dunque la serie non può convergere totalmente. Per $x = 0$ la serie è nulla, mentre per ogni $0 < x \leq 1$ tramite il criterio di Leibnitz per le serie numeriche otteniamo la convergenza puntuale ad una funzione f. Sia s_k la somma dei primi k termini della serie data. Allora

$$|f(x) - s_k(x)| \leq \frac{x^{k+1}}{k+1} \leq \frac{1}{k+1}$$

da cui segue che la convergenza è anche uniforme.

Esercizio 14: Stabilire per quali $x > 0$ convergono le serie

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^n}$$

ed il tipo di convergenza.

Sol.: (a): Per $x \leq 1$ abbiamo (poiché $1/x \geq 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

dunque non si può avere convergenza puntuale. Per $x > 1$ invece dal criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx^n}{(n+1)x^{n+1}} = \frac{1}{x} < 1$$

pertanto la serie data è convergente per $x > 1$ ad una funzione f. Non si può avere la convergenza totale perché

$$\sup_{(1,+\infty)} \frac{1}{nx^n} = \frac{1}{n}$$

e la serie armonica diverge. Invece

$$\sup_{(1,+\infty)} |f(x) - s_k(x)| = \sup_{(1,+\infty)} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} \right| = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che tende a 0 per $k \to \infty$. Quindi la serie converge uniformemente in $(1, +\infty)$.

(b): possiamo applicare il criterio della radice

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2 x^n}} = \frac{1}{x}$$

Dunque se $x < 1$ non si può avere convergenza, mentre per $x \geq 1$ la serie è stimabile nel seguente modo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 x^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Si ha dunque convergenza totale in $[1, +\infty)$.

Esercizio 15: Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} n! \frac{x^n}{2^n} \qquad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n}$$

Sol.: (a): Dal criterio di D'Alembert

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

da cui $\varrho = \infty$.

(b): Ancora dal criterio di D'Alembert

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty$$

da cui $\varrho = 0$.

(c): Per Cauchy-Hadamard

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{5^n}} = \frac{1}{5}$$

da cui $\varrho = 5$.

Esercizio 16: Determinare l'intervallo di convergenza (ossia il raggio di convergenza ed il comportamento al bordo) delle seguenti serie

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} x^n \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 9^n} x^n$$

Sol.: (a): Abbiamo

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 2$$

che implica $\varrho = 1/2$. Per $x = 1/2$ la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

che diverge poiché per ogni $n \geq 1$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}.$$

Invece per $x = -1/2$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

converge per il criterio di Leibnitz.

(b): Si ha

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 9^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{9^n((1/3)^n + 1)}} = \frac{1}{9} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(1/3)^n + 1}} = \frac{1}{9}$$

da cui $\varrho = 9$. Per $x = \pm 9$ abbiamo inoltre

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 9)^n}{3^n + 9^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^n}{(1/3)^n + 1}$$

ed entrambe le serie non convergono perché il loro termine generico non è infinitesimo.