1 Successioni di funzioni

Esercizio 1.1. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} \qquad x \in \mathbf{R}\,. \tag{1.1}$$

Osserviamo che fissato $x \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^2}{(\frac{1}{n^2}+x^2)} = 1$$

pertanto la successione f_n converge puntualmente in $\mathbf{R}$ alla funzione $f(x) = 1$. Verifichiamo se si ha convergenza uniforme in $\mathbf{R}$ calcolando

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|.$$

Risulta

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+n^2x^2} =: g_n(x)$$

La funzione $g_n(x)$ è una funzione pari, positiva e derivabile e $\lim_{x\to\pm\infty} g_n(x) = 0$, pertanto $\sup_{x\in\mathbf{R}} g_n(x) = \max_{x\in\mathbf{R}} g_n(x)$ e può essere calcolato cercando gli zeri di $g_n'(x)$. Si ha

$$g_n'(x) = -\frac{2n^2x}{(1+n^2x^2)^2}$$

pertanto $\max_{x\in\mathbf{R}} g_n(x) = g_n(0) = 1$ e

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} g_n(x) = 1 \neq 0.$$

Verifichiamo se esistono sottoinsiemi di $\mathbf{R}$ in cui si ha convergenza uniforme. Sia J un qualunque intorno dell'origine, allora

$$\sup_{x\in J} g_n(x) = g_n(0) = 1$$

Consideriamo allora intervalli del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$. Dallo studio della monotonia di g_n si ha che

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} g_n(x) = g_n(a) = \frac{1}{1+n^2a^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Quindi si ha convergenza uniforme in intervalli del tipo $[a, +\infty)$. In modo del tutto analogo si prova convergenza uniforme anche su intervalli tipo $(-\infty, a]$. Pertanto si conclude che f_n converge uniformemente a 1 in $(-\infty, a] \cup [b, \infty)$ con $a, b > 0$.

Esercizio 1.2. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = \frac{3x+4n}{x^2+n^2}. \tag{1.2}$$

Le funzioni f_n sono definite in tutto $\mathbf{R}$ per cui la convergenza puntuale si studia in $\mathbf{R}$. Per $x \in \mathbf{R}$ fissato si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ poiché il denominatore è un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore.
Verifichiamo se si ha convergenza uniforme. Si deve calcolare $\|f_n - f\|_{\mathbf{R}} := \sup_{x\in R} |f_n(x) - f(x)|$, e verificare che converga a 0. A tale fine facciamo un piccolo studio di funzione. Osserviamo che la funzione è continua e derivabile in tutto $\mathbf{R}$. Per $x \to \pm\infty$ la funzione f_n converge a 0. Calcoliamo i punti in cui si annulla la derivata prima

$$f_n'(x) = \frac{3(x^2+n^2) - 2x(3x+4n)}{(x^2+n^2)^2} = \frac{-3x^2 - 8nx + 3n^2}{(x^2+n^2)^2} = 0$$

gli zeri di f' sono $x_{1,2} = \frac{-4n\pm\sqrt{16n^2+9n^2}}{3} = -3n\,;\, \frac{1}{3}n$ (in realtà non serve sapere quale sia il massimo o il minimo relativo della funzione dal momento che se ne sta valutando l'estremo superiore del valore assoluto). Calcoliamo $f_n(x_1) = \frac{-9n+4n}{9n^2+n^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{n}$, $f_n(x_2) = \frac{n+4n}{(1/9)n^2+n^2} = \frac{5}{(10/9)}\frac{1}{n} = \frac{9}{2}\frac{1}{n}$. Quindi

$$\|f_n\|_{\mathbf{R}} = \sup_{x\in R} |f_n(x)| = \max\{|f_n(x_1)|, |f_n(x_2)|, |\lim_{x\to\infty} f_n(x)|, |\lim_{x\to-\infty} f_n(x)|\} = \frac{9}{2}\frac{1}{n}$$

che tende a 0 per n tendente ad infinito. Dunque la successione converge uniformemete a 0.

Esercizio 1.3. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \tag{1.3}$$

Le funzioni f_n sono definite in $\mathbf{R}$. Per $x = 0$ risulta $f_n(x) = 0$. Per ogni $x \in \mathbf{R}/\{0\}$ risulta $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ poiché il denominatore è un infinito di ordine superiore rispetto al numeratore. Quindi la successione converge puntualmente in $\mathbf{R}$ alla funzione 0.
La convergenza non è uniforme. Infatti per $x_n = \frac{1}{n}$ risulta $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, e quindi non puo essere $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| = \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$ poiché per la proprietà dell'estremo superiore abbiamo $\|f_n\| := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| \geq \frac{1}{2}$.

Si cercano ora gli intervalli in cui può esserci convergenza uniforme. Consideriamo gli intervalli del tipo $I = \mathbf{R}\backslash]-a, a[$ con $a > 0$. La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{-n^3x^2 + n = n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}\ ,$$

e si annulla per $x_{1,2} = \pm\frac{1}{n}$. Per n sufficientemente grande si ha $0 < \frac{1}{n} < a$ e quindi $x_1, x_2 \notin I$ e nell'intervallo in considerazione non si annulla la derivata prima, quindi calcolare $\|f_n\|_I$, si deve valutare la successione di funzione solo negli estremi. Dunque viene

$$\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \max\{\lim_{x\to-\infty} f_n(x), \lim_{x\to\infty} f_n(x), f_n(-a), f_n(a)\}$$

poiché la successine di funzioni converge puntulamete a zero, si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(\pm a) = 0$ e qundi anche $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_I = 0$. E la succesione di funzioni converge uniformemente negli intervalli di dipo I.

Esercizio 1.4. ***Traccia d'esame (18 Luglio 2008)***
Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni

$$f_n(x) = \arctan \frac{nx^2}{n^2x+1} \qquad x \geq 0. \tag{1.4}$$

Fissato $x \geq 0$ risulta

$$\lim_{n\to\infty} \arctan \frac{nx^2}{n^2x+1} = 0.$$

Pertanto la successione f_n converge puntualmente alla funzione $f(x) = 0$ per ogni $x \geq 0$. Essendo $f_n(x) \geq 0$ per $x \geq 0$, per verificare che vi sia anche convergenza uniforme calcoliamo $\sup_{x\geq 0} f_n(x)$. Si prova che $f_n'(x) = 0$ se e soltanto se $x = 0$ e $f_n(0) = 0$. Pertanto

$$\sup_{x\geq 0} \arctan \frac{nx^2}{n^2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \arctan \frac{nx^2}{n^2x+1} = \frac{\pi}{2}$$

e quindi non si ha convergenza uniforme in $[0, +\infty)$. Se ci restringiamo ad intervalli limitati del tipo $[0, a]$ con $a > 0$ allora

$$\sup_{x\in[0,a]} \arctan \frac{nx^2}{n^2x+1} = \arctan \frac{na^2}{n^2a+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Quindi la successione f_n converge uniformemente a 0 in intervalli compatti di $[0, +\infty)$.

Esercizio 1.5. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = n^2x^2(1-x)^n \qquad x \in \mathbf{R}. \tag{1.5}$$

È facile osservare che la successione converge puntualmente a 0 per valori di x tali che $|1-x| < 1$ e per $x = 0$. Altrimenti dato che $\lim_{n\to\infty} b^n = \infty$ per $b > 1$ e la successione $(-1)^n(4n^2)$ non converge, la successione f_n non converge. Consideriamo allora l'intervallo $[0, 2)$ e verifichiamo che se in esso vi è convergenza uniforme. Si può notare che

$$\sup_{x\in[0,2)} |n^2x^2(1-x)^n| \geq \lim_{x\to 2^-} |n^2x^2(1-x)^n| = 4n^2$$

quindi non vi è convergenza uniforme in $[0, 2)$. Fissiamo $0 < a < 2$ e calcoliamo $\sup_{x\in[0,a]} |n^2x^2(1-x)^n|$ trovando gli zeri di f_n'. Risulta

$$f_n'(x) = n^2x(1-x)^{n-1}[2 - x(n+2)] = 0$$

se e soltanto se $x \in \{0, 1, \frac{2}{2+n}\}$. Pertanto

$$\sup_{x\in[0,a]} |n^2x^2(1-x)^n| = \max\{|f_n(0)|, |f_n(1)|, |f_n(\frac{2}{2+n})|, |f_n(a)|\} = \max\{|f_n(\frac{2}{2+n})|, |f_n(a)|\}$$

dove

$$|f_n(\frac{2}{2+n})| = \frac{4n^2}{(n+2)^2}\left(1 - \frac{2}{2+n}\right)^n$$

$$|f_n(a)| = |n^2a^2(1-a)^n|$$

Supponiamo per assurdo che vi sia convergenza uniforme quindi se definiamo

$$a_n := \max\{|f_n(\frac{2}{2+n})|, |f_n(a)|\}$$

risulta che esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Questo fatto implica che comunque si scelga $\varepsilon > 0$, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che per $n \geq \mu$, $|f_n(\frac{2}{2+n})| \leq |a_n| < \varepsilon$ il che è assurdo perchè la successione $f_n(\frac{2}{2+n})$ non è infinitesima per $n \to \infty$.
Per avere convergenza uniforme è necessario allontanarsi anche da 0, infatti siano $0 < b < a < 2$, definitivamente avremo che $\frac{2}{2+n} < b$ e

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[b,a]} |n^2x^2(1-x)^n| = \lim_{n\to\infty} \max\{|f_n(a)|, |f_n(b)|\} = 0.$$

Pertanto la successione f_n converge uniformemente a 0 in intervalli compatti contenuti in $(0, 2)$.

Theorem 1.1. *(Continuità del limite uniforme) Siano $f_n, f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Se $f_n \in C(I)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e la successione f_n converge uniformemente ad f in I allora $f \in C(I)$.*

L'utilità di questo teorema consiste nell'applicarlo al contrario, cioè se si ha una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione che non è continua allora la convergenza non può essere uniforme.

Esercizio 1.6. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = \sqrt[n]{\sin x} \qquad x \in [0, \pi]. \tag{1.6}$$

Essendo $0 \leq \sin x \leq 1$ per $x \in [0, \pi]$ risulta che f_n converge puntualmente alla funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in (0, \pi) \\ 0 & x = 0 \vee x = \pi \end{cases}$$

Applicando il teorema di continuità del limite uniforme si deduce che la successione f_n non può convergere uniformemente ad f in $[0, \pi]$. Fissiamo $\varepsilon \in (0, \frac{pi}{2})$ e consideriamo l'intervallo $A_\varepsilon = [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$. Risulta

$$\begin{aligned} \sup_{x\in A_\varepsilon} |\sqrt[n]{\sin x} - 1| &= \sup_{x\in A_\varepsilon} (1 - \sqrt[n]{\sin x}) \\ &= 1 - \inf_{x\in A_\varepsilon} \sqrt[n]{\sin x} = 1 - \sqrt[n]{\sin \varepsilon} \end{aligned}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \sqrt[n]{\sin \varepsilon}) = 0$$

pertanto si ha convergenza uniforme in intervalli del tipo $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ per $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 1.7. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1+nx)(x^2+1)} \tag{1.7}$$

per $x \geq 0$.

Fissato $x > 0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x^2}$, se invece $x = 0$ si ha $f_n(x) = 0$. In definitiva si ha

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

La convergenza non può essere uniforme, in quanto la funzione limite non è continua.

Si provi a studiare la convergenza negli intervalli del tipo $[a, +\infty)$ dove $a > 0$.

Esercizio 1.8 (funzione limite continua non implica convergenza uniforme)**.** *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

per $x \in [0, 1]$.

La funzione limite è $f(x) = 0$ che è continua, ma la convergenza non è uniforme, in quanto per $x_n = \frac{1}{n}$ si ha $f_n(x_n) = 1$ e quindi $\|f_n\|_{[0,1]} \ge 1$.

Theorem 1.2. *(Passaggio al limite sotto il segno di integrale) Siano* $f_n, f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$. *Se* $f_n \in C(I)$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *e la successione* f_n *converge uniformemente ad* f *in* I *allora per ogni* $[a, b] \subset I$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Esercizio 1.9 (Il passaggio al limite sotto il segno di integrale è condizione necessaria per la convergenza uniforme)**.** *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni*

$$f_n(x) = nxe^{-nx^2}. \tag{1.8}$$

Le funzioni f_n sono definite in $\mathbf{R}$. Per $x = 0$ abbiamo $f_n(x) = 0$, per ogni $x \in \mathbf{R}/\{0\}$ si ha $-x^2 < 0$ e quindi nxe^{-nx^2} tenderà a zero poichè $\lim_{n\to\infty} ne^{-na} = 0$ per $a > 0$. Qundi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ puntualmente in $\mathbf{R}$.
Per calcolare il $\sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - 0|$, cerchiamo gli zeri della derivata prima di $f_n(x)$.

$$f_n'(x) = ne^{-nx^2} - 2n^2x^2e^{-nx^2} = ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2)$$

si annulla in $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2n}}$ e $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Per ottenere il sup confrontiamo il valore della funzione in tali punti ed negli estremi

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)| &= \max\{|f_n'(x_1)|, |f_n'(x_2)|, |\lim_{x\to\infty} f(x)|, |\lim_{x\to-\infty} f(x)|\} \\ &= \max\left\{\frac{1}{2}\sqrt{n}e^{1/2}, \frac{1}{2}\sqrt{n}e^{-1/2}, 0, 0\right\} = \frac{1}{2}\sqrt{n}e^{1/2} \end{aligned}$$

quindi $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| = \infty$ e la serie non converge uniformemente in $\mathbf{R}$.
Cerchiamo gli intervalli in cui la successione di funzioni converge uniformemente. Se consideriamo l'intervallo $I = [a, +\infty[$ con $a > 0$, definitivamente esso non conterrà il punto x_2, poichè $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}} = 0$ e quindi esiste un $\eta \in \mathbf{N}$ per cui $\forall n \in N$ t.c. $n \geq \eta$, $\frac{1}{\sqrt{2n}} < a$. Quindi per valutare il sup delle funzioni in I si dovrà valutare solo gli estremi, $\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \max\{|f_n'(a)|, |\lim_{x\to\infty} f(x)|\} = nae^{-na^2}$ che ovviamente converge a zero. Analogamente si puo ragionare nell'intervallo $]-\infty, -a]$. Quindi la successione di funzioni converge uniformemente in $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

Calcoliamo ora l'integrale di f_n nell'intervallo $[0, +\infty[$ ed osserviamo che non vale il teorema del passaggio al limite sotto il segno di integrale.

$$\int_0^\infty f_n = -\frac{1}{2}\Big|_0^\infty e^{-nx^2} = \frac{1}{2}$$

per cui $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = \frac{1}{2} \neq \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^\infty 0 = 0$.

Esercizio 1.10 (Il passaggio al limite sotto il segno di integrale non implica convergenza uniforme)**.** *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni*

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \cos^2 x\right)^n \qquad x \in [0, \frac{\pi}{2}] \tag{1.9}$$

e calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx$$

Si osservi che $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = e$, inoltre essendo definitivamente $\frac{1}{n} + \cos^2 x < 1$ in $(0, \frac{\pi}{2}]$ risulta che la successione f_n converge puntualmente alla funzione f così definita

$$f(x) = \begin{cases} e & x = 0 \\ 0 & x \in (0, \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Dalla discontinuità di f si deduce che f_n non converge uniformementa ad f in $[0, \frac{\pi}{2}]$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e consideriamo l'intervallo $A_\varepsilon = [\varepsilon, \frac{\pi}{2}]$. Risulta

$$\begin{aligned}\sup_{x\in A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| &= \max_{x\in A_\varepsilon} \left(\frac{1}{n} + \cos^2 x\right)^n \\ &= f_n(\varepsilon) = \left(\frac{1}{n} + \cos^2 \varepsilon\right)^n\end{aligned}$$

a causa della decrescenza di f_n in A_ε. Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

quindi f_n converge uniformemente in A_ε. Calcoliamo ora il limite richiesto. Spezziamo l'integrale in due dal momento che non possiamo applicare il teorema del passaggio al limite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = \int_0^\varepsilon f_n(x)dx + \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = I_\varepsilon^n + II_\varepsilon^n$$

per convergenza uniforme si ha che

$$\lim_n II_\varepsilon^n = \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = 0$$

Osserviamo che

$$I_\varepsilon^n = \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{n} + \cos^2 x\right)^n dx \leq \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n dx \leq e\varepsilon$$

definitivamente essendo $\left(\frac{1}{n}+1\right)^n$ una successione crescente e tendente ad e per $n \to \infty$. Pertanto si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx \leq e\varepsilon$$

e per l'arbitrarietà di ε $\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)dx = 0 (= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx)$.

Theorem 1.3. *(Inversione dei limiti) Siano X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{R}$, x_0 un punto di accumulazione per X ed $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ una successione di funzioni reali definite in X. Si supponga che*

i) La successione $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformemente verso una funzione $f : X \to R$;

ii) Per ogni $n \in \mathbf{N}$, risulta $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$

Allora, la successione $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ è convergente e inoltre, posto $l := \lim_{n\to\infty} l_n$, risulta $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.

Esercizio 1.11. *Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni*

$$f_n(x) = n^x x^n \quad x \in \mathbf{R}\,. \tag{1.10}$$

Per $|x| < 1$, $|x^n|$ tende a 0 con un ordine di infinitesimo superiore a $1/n^x$, per cui la successione di funzioni converge a 0. Per $|x| > 1$, $|n^x x^n|$ diverge. In $x = 1$ la successione non converge, per $x = -1$ converge a zero.

Infatti per $0 \leq x < 1$ si ha $n^x x^n \leq n x^n$ e la successione numerica na^nper $0 \leq a < 1$ converge a zero. Per $x = 1$, $f_n(1) = n$ che tende all'infinito.
In $-1 < x \leq 0$, sia n^x che $|x|^n$ tendono a zero per n tendente all'infinito per cui $\lim_{n\to\infty} |f_n(x)| = 0$. Per $x = -1$, $f_n(-1) = \frac{(-1)^n}{n}$ tende a 0. Per $x \leq -1$ possiamo scrivere $n^x x^n = (-1)^n \frac{(-x)^n}{n^{(-x)}}$, ma $\frac{(-x)^n}{n^{(-x)}}$ tende all'infinito per $n \to \infty$. Quindi la successione di funzioni converge puntualmente a 0 in $[-1, 1[$.

La successine non converge uniformemente in quanto

$$\lim_{x\to 1} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1} 0 = 0 \neq \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to -1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

e quindi non vale il teorema di inversione dei limiti, che è condizione necessaria per la convergenza uniforme.

Studiamo la successione per $I = [-1, a]$ con $-1 < a < 1$ allontanandoci dal punto 1. La derivata di $f_n(x)$ si annulla solo per $x = 0$ (Verificare). Definitivamente abbiamo

$$\|f_n\|_I = \sup_{x\in I} |f_n(x)| = \max\{|f(-1)|, |f(0)|, |f(a)|\} = \max\{\frac{1}{n}, 0, n^a a^n\} = \frac{1}{n}$$

quindi la successione di funzioni converge uniformemente in $[-1, a]$.